ШУМЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Задачи по математически анализ
II част

Мирослав Христов

Шумен
2013 г.

Съдържание

Тема 1. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

§1.1. Непосредствено интегриране

Дефиниция 1.1. Функцията $F(x)$ се нарича примитивна на $f(x)$ в интервала (a,b), ако $F'(x)=f(x)$ за всяко $x\in(a,b)$.

Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ и c е произволна константа, функцията $F(x)+c$ е също примитивна на $f(x)$.

Дефиниция 1.2. Множеството от примитивните функции на $f(x)$ се нарича *неопределен интеграл* и се записва по следния начин:

$$\int f(x)dx = F(x)+c,$$

където c пробягва множеството на реалните числа.

Намирането на неопределените интеграли на някои елементарни функции се свежда до следната таблица на основните интеграли:

Таблични интеграли	
$\int 1dx = x+c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + c$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+c$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + c \\ -\mathrm{arc}\cot \mathrm{g} x + c \end{cases}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert + c$

За решаването на интеграли е необходимо да знаем следните няколко свойства:

1) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

2) $\int c.f(x)dx = c\int f(x)dx$, където c е константа, различна от 0;

3) $\int f(x)dx = \int f(x)d(x+c)$, където c е константа;

4) $\int f(x)dx = \dfrac{1}{c}\int f(x)d(cx)$, където c е константа, различна от 0.

Под *непосредствено интегриране* се разбира „изравняване" на величина под знака на диференциала с аргумента на функцията под интеграла, и след това прилагане на някой от изброените по-горе интеграли в комбинация с посочените свойства.

В таблицата на основните интеграли предполагаме, че x е независима променлива. Но тези формули остават в сила и когато променливата x формално се замени с функция $u = \varphi(t)$, където φ има производна спрямо променливата t . Наистина нека е известно, че $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

От правилото за диференциране на сложна функция имаме:

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)).\varphi'(t) = f(\varphi(t)).\varphi'(t) .$$

Тогава според дефиниция 1.2 можем да запишем:

$$\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C .$$

Тъй като $u = \varphi(t)$ и $d\,u = d\,\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$, след заместване в горното равенство получаваме:

$$\int f(\varphi(t))\ d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C \text{ или } \int f(u)\ du = F(u) + C.$$

По такъв начин получаваме следната обобщена таблица:

Обобщена таблица на основните интеграли	
$\int 1 d\varphi(x) = \varphi(x) + c$	$\int \cos\varphi(x) d\varphi(x) = \sin\varphi(x) + c$
$\int \varphi(x)^{\alpha}\ d\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\cos^2\varphi(x)} = tg\varphi(x) + c$
$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sin^2\varphi(x)} = -\cot g\varphi(x) + c$
$\int a^{\varphi(x)} d\varphi(x) = \dfrac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}} = \begin{cases} \arcsin\varphi(x) + c \\ -\arccos\varphi(x) + c \end{cases}$
$\int e^{\varphi(x)} d\varphi(x) = e^{\varphi(x)} + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{1+\varphi(x)^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\varphi(x) + c \\ -\mathrm{arc}\cot\mathrm{g}\varphi(x) + c \end{cases}$
$\int \sin\varphi(x) d\varphi(x) = -\cos\varphi(x) + c$	$\int \dfrac{d\varphi(x)}{\sqrt{\varphi(x)^2 + a}} = \ln\left\lvert\varphi(x) + \sqrt{\varphi(x)^2 + a}\right\rvert + c$

Задача 1.1. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \left(3x^2 + 2x - 7\right) dx$;

б) $\int \left(\dfrac{9}{x} - \dfrac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$;

в) $\int \left(2e^x - 5\cos x + \dfrac{1}{2+2x^2}\right) dx$;

е) $\int \dfrac{x^2}{1+x^2} dx$;

ж) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}$;

з) $\int \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3}{1+4x^2}\right) dx$;

г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-4x^2}}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$;

и) $\int\left[\sin(7x-1)+\frac{1}{e^x}\right]dx$;

д) $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

й) $\int\left(\frac{8}{5+9x^2}-\frac{11}{\cos^2\frac{x}{\pi}}\right)dx$.

Решения:

а) $\int\left(3x^2+2x-7\right)dx=\int 3x^2dx+\int 2xdx-\int 7dx=3\int x^2dx+2\int xdx-7\int 1dx=x^3+x^2-7x+c$;

б) $\int\left(\frac{9}{x}-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int\frac{9}{x}dx-\int\frac{4}{x^3}dx+\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=9\int\frac{dx}{x}-4\int x^{-3}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx=$

$=9\ln|x|+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$;

в) $\int\left(2e^x-5\cos x+\frac{1}{2+2x^2}\right)dx=2\int e^xdx-5\int\cos xdx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=2e^x-5\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+c$;

г) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-4x^2}}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+3\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\arcsin x-3\cot gx+c$;

д) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int 1dx+\int\cos xdx\right)=\frac{1}{2}(x+\sin x)+c$

е) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-\mathrm{arctg}x+c$;

ж) $\int\frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=$

$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\mathrm{t\,g}x-\cot gx+c$;

з) $\int\left(\frac{1}{x+2}+\frac{3}{1+4x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{dx}{1+(2x)^2}=\int\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{d2x}{1+(2x)^2}=$

$=\ln|x+2|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2x)+c$;

и) $\int\left[\sin(7x-1)+\frac{1}{e^x}\right]dx=\int\sin(7x-1)dx+\int\frac{1}{e^x}dx=\frac{1}{7}\int\sin(7x-1)d(7x-1)-\int e^{-x}d(-x)=$

$=-\frac{1}{7}\cos(7x-1)-e^{-x}+c$;

й) $\int\left(\frac{8}{5+9x^2}-\frac{11}{\cos^2\frac{x}{\pi}}\right)dx=\frac{8}{5}\int\frac{dx}{1+\frac{9x^2}{5}}-11\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{\pi}}=\frac{8}{5}\frac{\sqrt{5}}{3}\int\frac{d\frac{3x}{\sqrt{5}}x}{1+\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2}-11\pi\int\frac{d\frac{x}{\pi}}{\cos^2\frac{x}{\pi}}=$

$=\frac{8\sqrt{5}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)-11\pi.\operatorname{tg}\frac{x}{\pi}+c$.

§1.2. Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала. Формула за интегриране по части

В случаите, когато е налице произведение от две или повече функции под знака на интеграла, е удачно да използваме познатото ни равенство $g(x)dx=G'(x)dx=dG(x)$, където $G'(x)=g(x)$. Следователно да внесем функцията $g(x)$ под знака на диференциала означава по същество да решим интеграла $\int g(x)dx$ (т.е. да намерим примитивна функция $G(x)$). Така получаваме равенството $\int f(x)g(x)dx=\int f(x)dG(x)$.

Много често под знака на диференциала се внасят някои елементарни функции, затова е необходимо да запомним следните правила:

1. $\int f(x).x^n\,dx=\frac{1}{n+1}\int f(x)\,dx^{n+1}$, $n\neq-1$;
2. $\int f(x).\frac{1}{x}dx=\int f(x)d\ln x$;
3. $\int f(x).a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}\int f(x)da^x$;
4. $\int f(x).e^x\,dx=\int f(x)de^x$;
5. $\int f(x).\sin x\,dx=-\int f(x)d\cos x$;

6. $\int f(x).\cos x\,dx = \int f(x)\,d\sin x$;

7. $\int f(x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int f(x)\,d\arcsin x$;

8. $\int f(x).\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int f(x)\,d\,\mathrm{arctg}x$;

9. $\int f(x).\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int f(x)\,d\,\mathrm{tg}x$;

10. $\int f(x).\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\int f(x)\,d\,\mathrm{cotg}x$.

Задача 1.2. Пресметнете интегралите, чрез внасяне на подходящата функция под знака на диференциала:

а) $\int e^{\sin x}\cos x dx$;

б) $\int \frac{\ln x}{x}dx$;

в) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$;

г) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$;

д) $\int \mathrm{tg}x dx$;

е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+3}}$;

ж) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$;

з) $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

Решения:

а) $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d\sin x = e^{\sin x}+c$;

б) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{x}.\ln x dx = \int \ln x\, d\left(\ln x\right) = \frac{\ln^2 x}{2}+c$;

в) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx = \int \sqrt{1+x^3}\,d\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\int \left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}d(1+x^3) = \frac{1}{3}\frac{\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = 2\sqrt{(1+x^3)^3}+c$;

г) $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int x\frac{1}{1+x^4}dx = \int \frac{1}{1+(x^2)^2}d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(x^2)^2}dx^2 = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x^2+c$;

д) $\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sin x . \frac{1}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\ln\left|\cos x\right| + c$;

е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 3}} = \int \frac{1}{x} \frac{dx}{\sqrt{\ln^2 x + 3}} = \int \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln^2 x + 3}} = \ln\left|\ln x + \sqrt{\ln^2 x + 3}\right| + c$;

ж) и з) Нека положим $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, а $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. Тогава

$I + J = \int 1 dx = x + c$

$I - J = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{1}{\sin x + \cos x} d(\sin x + \cos x) = -\ln\left|\sin x + \cos x\right| + c$ и след почленно събиране и изваждане получаваме съответно, че $I = \frac{1}{2}(x - \ln\left|\sin x + \cos x\right|) + c$ и $J = \frac{1}{2}(x + \ln\left|\sin x + \cos x\right|) + c$.

Обикновено след внасянето на функция под знака на диференциала се използва и *формулата за интегриране по части:* $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$. Най-често това се прилага за решаване на интеграли от вида:

$$\int P(x)\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx \text{ и } \int R(x)\begin{Bmatrix} \ln x \\ arc\sin x \\ arctgx \end{Bmatrix} dx,$$

като първият вид се пресмята чрез внасяне на трансцендентна функция под знака на диференциала и интегриране по части, а вторият вид – чрез внасяне на рационалната функция и отново интегриране по части.

Задача 1.3. Пресметнете чрез интегриране по-части:

а) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;

б) $\int (x^2 - 2x)e^{2x} dx$;

в) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$;

г) $\int x\mathrm{arctg}x dx$;

д) $\int e^x \cos x dx$;

е) $\int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx$

Решения:

а) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int x\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int x d\text{tg}x = x\text{tg}x - \int \text{tg}x dx = x\text{tg}x + \ln|\cos x| + c$, защото последният интеграл е решен в задача 1.2. д);

б) различното тук е, че аргументът на експоненциалната функция $2x$ не е равен на x. Затова се налага първо да ги „изравним”, като умножим под знака на диференциала с 2 и разделим интеграла на 2:

$$\int (x^2-2x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int (x^2-2x)e^{2x}d2x = \frac{1}{2}\int (x^2-2x)de^{2x} = \frac{1}{2}\Big[(x^2-2x)e^{2x} - \int e^{2x}d(x^2-2x)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x} - \int (x-1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (x-1)de^{2x} = \frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x} - \frac{1}{2}\Big[(x-1)e^{2x} - \int e^{2x}dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-2x)e^{2x} - \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c\ ;$$

в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\int \ln x\, d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}d\ln x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{3x^3} + c$;

г) $\int x\text{arctg}x dx = \frac{1}{2}\int \text{arctg}x dx^2 = \frac{x^2\text{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 d\text{arctg}x = \frac{x^2\text{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$

$= \frac{x^2\text{arctg}x}{2} - \frac{1}{2}(x - \text{arctg}x) + c$, защото последният интеграл е решен в задача 1.1. е);

д) внасяме коя да е от двете функции под знака на дифенциала и интегрираме по части, докато се получи даденият интеграл

$$\int e^x \cos x dx = \int \cos x de^x = e^x\cos x - \int e^x d\cos x = e^x\cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int \sin x de^x =$$

$$= e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x d\sin x = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x dx\, .$$

Приравнявайки най-лявата и най-дясната част на веригата от равенства, получаваме интегралното уравнение

$$\int e^x\cos x = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x dx\ ,$$

откъдето

$$\int e^x\cos x = \frac{1}{2}\left(e^x\cos x + e^x\sin x\right) + c\,;$$

е) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{x.x}{(1+x^2)^2}dx =$

$$= \text{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx^2 = \text{arctg}x - \frac{1}{2}\int x(1+x^2)^{-2}d(1+x^2) = \text{arctg}x + \frac{1}{2}\int xd(1+x^2)^{-1} =$$

$$= \text{arctg}x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\text{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c\ .$$

§1.3. Интегриране чрез субституции

За пресмятане на интеграла $\int f(x)dx$ понякога е целесъобразно да се извърши смяна на независимата променлива с помощта на някоя *субституция* $x = \varphi(t)$, където $\varphi(t)$ и нейната обратна функция $t = \psi(x)$ са диференцируеми. Тогава:

ако $\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + c$, то $\int f(x)dx = F\big(\psi(x)\big) + c$,

т.е. при субституция на практика се пресмята dx и обратната връзка $t = \psi(x)$, която заместваме в решението на интеграла, получен след субституцията.

Задача 1.4. Пресметнете интегрла:

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ с помощта на субституцията $x = a\cos t$ ($a>0$);

б) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$ с помощта на субституцията $x = t - 2$.

Решения:

а) Преди да пристъпим към решаване на интеграла, е необходимо да направим някои предварителни пресмятания, а именно $dx = d(a\cos t) = (a\cos t)'dt = -a\sin t dt$ и $t = \arccos\frac{x}{a}$.

Заместваме в изходния интеграл и получаваме:

$$\int \sqrt{a^2 - (a\cos t)^2}.(-a\sin t)dt = -a\int \sin t.\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}dt = -a^2\int \sin^2 tdt = -a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$= -\frac{a^2}{2}\left(\int 1dt - \int \cos 2tdt\right) = -\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + c$. Окончателният резултат е

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin(2\arccos\frac{x}{a}) + c$$

б) В този случай $dx = d(t-2) = (t-2)'dt = dt$ и $t = x+2$. Началният интеграл добива вида:

$$\int \frac{(t-2)+1}{(t-2)^2+4(t-2)+5}dt = \int \frac{t-1}{t^2+1}dt = \int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt^2 + \mathrm{arctg}t =$$

$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \mathrm{arctg}t + c$ и връщайки се към старата променлива, получаваме

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) + \mathrm{arctg}(x+2) + c\,.$$

§1.4. Интегриране на функции от вида $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Пресмятането на тези интеграли се свежда до решаване на интеграли от рационални функции с помощта на субституцията $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$, където q е най-малкото общо кратно на знаменателите $q_1, q_2, \ldots, q_n$. По-точно търсената субституция се получава след решаване на последното равенство спрямо *x*.

Задача 1.5. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$;

в) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решения:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{3}}}dx$ и за да направим необходимото полагане, трябва да

намерим НОК(2,3)=6. Полагането е $x = t^6$, $dx = dt^6 = (t^6)'dt = 6t^5dt$ и $t = x^{\frac{1}{6}}$. Тогава след заместване получаваме

$$\int \frac{(t^6)^{\frac{1}{2}}}{1-(t^6)^{\frac{1}{3}}}6t^5dt = 6\int \frac{t^8}{1-t^2}dt = 6\int (-t^6 - t^4 - t^2 - 1 + \frac{1}{t^2-1})dt =$$

Последното равенство е получено по следния начин:

$$\frac{t^8}{1-t^2} = -\frac{-t^8}{1-t^2} = -\frac{1-t^8+1}{1-t^2} = -\frac{1-t^8}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = -\frac{(1-t^4)(1+t^4)}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{(1-t^2)(1+t^2)(1+t^4)}{1-t^2} - \frac{1}{1-t^2} = -(1+t^2)(1+t^4) - \frac{1}{1-t^2} = -t^6 - t^4 - t^2 - 1 + \frac{1}{t^2-1}.$$

Връщаме се към пресмятането на последния интеграл

$$= -6(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \int \frac{1}{t^2-1}dt) = -\frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^3}{3} - 6t - \frac{6}{2}(\int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt) =$$

$$= -\frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^3}{3} - 6t - 3(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + c.$$

Окончателно $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = -\frac{6\sqrt[6]{x}^7}{7} - \frac{6\sqrt[6]{x}^5}{5} - \frac{6\sqrt[6]{x}^3}{3} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + c$.

б) Интегралът очевидно не е във вида, който решаваме, затова е необходимо да направим следните преобразувания:

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^4\frac{x-2}{x-1}}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}} = \int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}dx$. Сега е ясно каква

субституция да направим, а именно $\frac{x-2}{x-1} = t^2$. Тогава $x = \frac{2-t^2}{1-t^2}$ и $dx = \left(\frac{2-t^2}{1-t^2}\right)' dt =$

$= \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}dt$, замествайки в интеграла, получаваме:

$$\int \frac{1}{\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)^2} t \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt = 2\int t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + c$$

и следователно $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^3} + c$;

в) Полагаме $x+1 = t^6$, $dx = (t^6-1)'dt = 6t^5 dt$, $t = \sqrt[6]{x+1}$. Тогава получаваме:

$$\int \frac{t^6-1}{t^3+t^2} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^9-t^3}{t+1} dt = 6\int (t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3) dt =$$

$$= 6\frac{t^9}{9} - 6\frac{t^8}{8} + 6\frac{t^7}{7} - t^6 + 6\frac{t^5}{5} - 3\frac{t^4}{2} + c.$$

Накрая стигаме до търсения резултат

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx = 2\frac{\sqrt[6]{x+1}^9}{3} - 3\frac{\sqrt[6]{x+1}^8}{4} + 6\frac{\sqrt[6]{x+1}^7}{7} - \sqrt[6]{x+1}^6 + 6\frac{\sqrt[6]{x+1}^5}{5} - 3\frac{\sqrt[6]{x+1}^4}{2} + c =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - x - 1 + c.$$

§1.5. Биномен диференциал

Интеграли от вида $\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$, където a и b са различни от нула константи, а m, n и p – рационални числа, се наричат интеграли от *биномен диференциал* или *диференциален бином.* Съществуват три случая, когато тези интеграли се решават в елементарни функции.

i) Ако p е цяло число, правим субституцията $x = t^k$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите на m и n;

ii) Ако $\dfrac{m+1}{n}$ е цяло число, интегралът се свежда до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията $a+bx^n = t^k$, където k е знаменателят на p;

iii) Ако $\dfrac{m+1}{n}+p$ е цяло, то първо преобразуваме интеграла така: $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx$,

и след това правим полагането $b+ax^{-n}=t^k$, където k е знаменателят на p.

Когато числата m, n и p не удовлетворяват никое от посочените условия, разглежданите интеграли не се изразяват в елементарни функции. Да отбележим още, че в случаите ii) и iii) съответните субституции функционират и без предположение за рационалност на m и n.

Задача 1.6. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;   б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2}$;   в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Решения:

а) Записваме интеграла във вида $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{-1}x^{-1}(1+x^{-2})^{-\frac{1}{2}}dx$. За константите $m=-2, n=-2$ и $p=-\dfrac{1}{2}$ е изпълнено третото условие $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{-2+1}{-2}-\dfrac{1}{2}=0$. Тогава субституцията е следната: $1+x^{-2}=t^2$. Изразяваме $x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $dx=d(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}=[(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}]'dt=-t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt$ и отново се връщаме към пресмятането на интеграла

$$-\int ((t^2-1)^{-\frac{1}{2}})^{-2}(t^2)^{-\frac{1}{2}}t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt = -\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+c \text{ и}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left|\sqrt{1+x^{-2}}+\sqrt{x^{-2}}\right|+c = -\ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{|x|}\right|+c.$$

б) Записваме интеграла във вида $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2} = \int (1+\sqrt[4]{x})^{-2} dx = \int x^0 (1+x^{\frac{1}{4}})^{-2} dx$ и тогава $m=0, n=\frac{1}{4}, p=-2$ - цяло. Следователно налице е първият случай. Полагаме $x=t^4$, $dx = dt^4 = (t^4)'dt = 4t^3 dt$ и заместваме в интеграла:

$$\int (1+t)^{-2} 4t^3 = 4\int \frac{t^3}{(1+t)^2} dt = 4\int \left(t-2+\frac{3t+2}{(1+t)^2} \right) dt = .$$

$$= 4\int t dt - 8\int dt + 4\left(\int \frac{3}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} dt \right) = 2t^2 - 8t + 12\ln|t+1| + \frac{4}{1+t} + c .$$

Сумата $t-2+\frac{3t+2}{(1+t)^2}$ се получава след разделяне полинома t^3 на полинома $(1+t^2) = t^2+2t+1$.

Окончателно $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^2} = 2\sqrt[4]{x}^2 - 8\sqrt[4]{x} + 12\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + c .$

в) Записваме интеграла във вида $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{\frac{-2}{3}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx$, тогава $m=-\frac{2}{3}, n=\frac{1}{3}, p=\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = 1$ - цяло число. Получихме втория случай и полагаме $1+x^{\frac{1}{3}} = t^2$. Тогава $x=(t^2-1)^3$ и $dx = \left[(t^2-1)^3 \right]' dt = 6t(t^2-1)^2 dt$ и заместваме получените резултати в интеграла

$$\int \left((t^2-1)^3 \right)^{\frac{-2}{3}} \left(t^2 \right)^{\frac{1}{2}} 6t(t^2-1)^2 dt = 6\int t^2 dt = 2t^3 + c .$$

Връщаме се към x и $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}^3 + c .$

§1.6. Субституции на Ойлер

Интеграли от вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \quad a\neq 0, b^2-4ac\neq 0$, където R е рационална функция на две променливи, могат да бъдат приведени към интеграли от рационални функции с помощта на субституциите на Ойлер. Те се прилагат в следните случаи:

i) при $a>0$ може да се положи $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$;

ii) при $c>0$ може да се положи $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c}$;

iii) когато квадратният тричлен има реални нули, x_1 и x_2 може да се положи

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$.

Понякога е възможно конкретният интеграл от разглеждания вид да бъде пресметнат с помощта на повече от една от посочените субституции. Обемът на изчисленията зависи от приложените субституции.

Задача 1.7. Решете интегралите:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$ в) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x+4}}, x>1$;

Решения:

а) В този интеграл $a=1>0$ и $c=1>0$ можем да приложим първата и втората субституция, но нека да положим $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$. След повдигане в квадрат изразяваме x по следния начин: $x^2+x+1=x^2-2xt+t^2$. Вторите степени на x се унищожават, което е характерно за тази субституция, и $x+2xt=t^2-1$. Откъдето $x.(1+2t)=t^2-1$ и $x=\dfrac{t^2-1}{1+2t}$. Пресмятаме $dx=d\left(\dfrac{t^2-1}{1+2t}\right)=\left(\dfrac{t^2-1}{1+2t}\right)'dt=\dfrac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt$, заместваме в дадения интеграл и стигаме до $2\int \frac{(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}dt$. Разлагаме подинтегралната функция в сума от елементарни дроби:

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2},$$

а оттук, след привеждане под общ знаменател, приравняваме числителите

$$t^2+t+1 = A(1+2t)^2 + Bt(1+2t) + Ct.$$

Последователно даваме следните стойности на *t*, $t=0, t=-\frac{1}{2}$ и $t=1$ и получаваме $A=1, B=-\frac{3}{2}$ и $C=-\frac{3}{2}$. Следователно

$$2\int \frac{(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}dt = 2\int\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\frac{1}{1+2t} - \frac{3}{2}\frac{1}{(1+2t)^2}\right)dt = 2\int\frac{dt}{t} - 3\int\frac{dt}{1+2t} - 3\int\frac{dt}{(1+2t)^2} =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2}\frac{1}{1+2t} + c.$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2(\sqrt{x^2+x+1}+x)\right| + \frac{3}{2}\frac{1}{1+2(\sqrt{x^2+x+1}+x)} + c;$$

б) За решаване на този интеграл може да приложим втората субституция на Ойлер. Полагаме $\sqrt{x^2-5x+4} = xt+2$ и след повдигане в крадрат двете страни може да изразим $x = \frac{5+4t}{1-t^2}$ и съответно $dx = d\left(\frac{5+4t}{1-t^2}\right) = \frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt$. Като заместим в интеграла, имаме

$$\int\frac{1}{\frac{5+4t}{1-t^2}t+2}.\frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt = \int\frac{1-t^2}{2t^2+5t+2}\frac{4t^2+10t+4}{(1-t^2)^2}dt = 2\int\frac{1}{1-t^2}dt =$$

$$= 2\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\right)dt = \int\frac{1}{1-t}dt + \int\frac{1}{1+t}dt = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c.$$

Решението на интеграла е $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}} = \ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2-\sqrt{x^2-5x+4}}\right| + c$.

в) Тъй като квадратният тричлен под радикала има реални корени -4 и 1, може да положим

$\sqrt{x^2+3x+4}=t(x-1)$. Субституцията ни дава $x=\frac{t^2+4}{t^2-1}$ и $dx=-\frac{10t}{(t^2-1)^2}dt$ и следователно

$$-\int \frac{1}{\left(\frac{t^2+4}{t^2-1}+4\right)t\left(\frac{t^2+4}{t^2-1}-1\right)}\frac{10t}{(t^2-1)^2}dt=-10\int\frac{1}{(t^2+4+4t^2-4)(t^2+4-t^2+1)}dt=$$

$$=-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{2}{5}\frac{1}{t}+c\,.$$

Прилагаме последната стъпка и получаваме $\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x+4}}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}+c$.

§1.7. Интегриране на рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

Интеграли от вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, където R е рационална функция на две променливи ($\sin x$ и $\cos x$), могат да се сведат до интеграли от рационална функция с помощта на следните субституции:

i) При $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=tgx$.

Тогава $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$, $\sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2}$ и $dx=\frac{dt}{1+t^2}$;

ii) При $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=\cos x$.

Тогава $\sin x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

iii) При $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, полагаме $t=\sin x$.

Тогава $\cos x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Ако не е изпълнено никое от по-горните условия, може да приложим така наречената „универсална субституция”: $t=tg\frac{x}{2}$. Тогава $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Да отбележим, че това полагане понякога води до сложни интеграли от рационални функции.

Задача 1.8. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$;

б) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.

Решения:

а) Тъй като $R(\sin x, -\cos x) = \sin^2 x(-\cos x)^3 = -\sin^2 x \cos^3 x = -R(\sin x, \cos x)$, удобно е да се извърши субституцията $t = \sin x$. След заместване в началния интеграл получаваме:

$$\int t^2 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int t^2 \left(1-t^2\right) dt = \int \left(t^2 - t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c .$$

Откъдето достигаме до резултата $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$;

б) За подинтегралната функция е изпълнено

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{2(-\cos x)(-\sin x)}{(-\sin x)^4 + (-\cos x)^4} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = R(\sin x, \cos x) .$$

Следователно тук може да положим $t = \mathrm{tg}x$ и интегралът добива вида:

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t^4}{(1+t^2)^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = 2\int \frac{t}{1+t^4} dt = \int \frac{1}{1+(t^2)^2} dt^2 = \mathrm{arctg} t^2 + c .$$

.

Връщаме се към обратната връзка в полагането и $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = arctg(tg^2 x) + c$.

в) Очевидно при този интеграл не можем да използваме никое от първите три полагания, затова ще използваме универсалната субституция $t = tg\frac{x}{2}$. Получаваме интеграла

$$\int \frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} 2\frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{t^2+4t-1}\,dt .$$

Разлагаме $\frac{1}{t^2+4t-1}$ в сума от елементарни дроби по следния начин:

$\frac{1}{t^2+4t-1} = \frac{A}{t+2-\sqrt{5}} + \frac{B}{t+2+\sqrt{5}}$ и следователно $1 = A(t+2+\sqrt{5}) + B(t+2-\sqrt{5})$, откъдето

лесно намираме, че $B = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$ и $A = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Тогава

$$2\int \frac{1}{t^2+4t-1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int \frac{1}{t+2-\sqrt{5}}\,dt - \int \frac{1}{t+2+\sqrt{5}}\,dt\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln\left|t+2-\sqrt{5}\right| - \ln\left|t+2+\sqrt{5}\right|\right) + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + c .$$

Окончателно $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\,\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + c .$

§1.8. Задачи за самоподготовка

Пресметнете интегралите:

1. $\int (7x^6 + 2\sqrt[3]{x})dx$;

2. $\int (4\cos x - 3e^{x+3})dx$;

3. $\int \left((2x-7)^4 - \frac{1}{4x-1}\right)dx$;

4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} + \frac{5}{\cos^2 3x}\right)dx$;

5. $\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}\,dx$;

16. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$;

17. $\int (3x^2+6)\sin x dx$;

18. $\int arctgx dx$;

19. $\int \frac{1}{(4+x^2)^2}\,dx$;

20. $\int (x^2-1)e^{3x-1}dx$;

6. $\int (tg^2 x + \cot g^2 x)dx$;

7. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$;

8. $\int \sin 2x \sin 5x dx$;

9. $\int \frac{1}{\sin x}dx$;

10. $\int \frac{1}{e^x+1}dx$;

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

12. $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$;

13. $\int \frac{x}{3-2x^2}dx$;

14. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$;

15. $\int \frac{1}{e^{2x}+e^{-2x}+2}dx$;

21. $\int \frac{\arccos x}{x^2}dx$;

22. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

23. $\int \frac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

24. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$;

25. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

26. $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$;

27. $\int \frac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

28. $\int \frac{1}{3+\cos x}dx$;

29. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}dx$;

30. $\int \frac{1}{\sin x(2\cos^2 x-1)}dx$.

Тема 2. НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

§2.1. Несобствени интеграли от първи и втори род

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в безкрайния интервал $[a,+\infty)$, и нека при всяко $A>a$ да съществува определеният интеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$.

Дефиниция 2.1. Ако съществува крайна граница $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$, то тази граница се нарича *несобствен интеграл от първи род* за функцията $f(x)$ върху интервала $[a,+\infty)$ и се означава с $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. В този случай се казва още, че $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ е *сходящ.* В противен случай казваме, че интегралът е *разходящ.* По аналогичен начин се дефинира и $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

Дефиниция 2.2. Ако $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ е сходящ, тогава $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ се нарича *абсолютно сходящ.*

Дефиниция 2.3. Ако $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ, но $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ не е абсолютно сходящ, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ се нарича *условно сходящ.*

Теорема 2.1. Ако $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ е абсолютно сходящ, тогава $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ е и сходящ.

Теорема 2.2. (Признак за сравнение) Нека за $x\in[a,+\infty)$ имаме $|f(x)|\le g(x)$. Тогава:

а) Ако $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ е сходящ, следва, че и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ;

б) Ако $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е разходящ, следва, че и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ е разходящ.

Ролята на втори интеграл (този, с който сравняваме) се играе най-често от $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$, $a > 0$, за който лесно може да се установи, че е сходящ за $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha \le 1$.

Следствие 2.1. Нека $f(x) \ge 0$ за всяко $x \in [a, +\infty)$, $g(x) > 0$ за всяко $x \in [a, +\infty)$ и $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Тогава:

а) ако $0 < \ell < +\infty$, то несобствените интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) ако $\ell = 0$, от сходимостта на $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следва сходимостта на $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

в) ако $\ell = +\infty$, от разходимостта на $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следва разходимостта на $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема 2.3. (Критерий на Дирихле) Нека $f(x)$ е непрекъсната върху $[a, +\infty)$, примитивната и $F(x) = \int f(x)dx$ е ограничена, $g(x)$ е непрекъснато диференцируема и монотонна функция, клоняща към 0 при $x \to \infty$. Тогава $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ е сходящ. (Ще отбележим, че изискването за непрекъснатата диференцируемост на $g(x)$ не е съществено.)

Нека $f(x)$ е неограничена в интервала $[a, b)$, но е интегруема във всеки интервал $[a, b-\varepsilon]$, където $b - a \ge \varepsilon > 0$ и $f(x)$ е интегруема в $[a, b-\varepsilon]$.

Дефиниция 2.4. Ако съществува крайната граница $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то тя се нарича *несобствен интеграл от втори род.* В този случай се казва, че интегралът $\int\limits_a^b f(x)dx$ е *сходящ*, а ако тази граница не съществува, интегралът е *разходящ*. Точката b се нарича *особена* точка.

Аналогично се дефинира и несобствен интеграл от втори род $\int\limits_a^b f(x)dx$, когато a е особената точка. За несобствените интеграли от втори род са в сила твърдения, аналогични на теорема 2.3 и следствие 2.1. Ролята на интеграла, с който сравняваме, се играе от $\int\limits_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$, когато особената точка е $x=b$, и $\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$, когато особената точка е $x=a$. И двата интеграла са сходящи при $\alpha<1$ и разходящи при $\alpha \geq 1$.

Ако $c \in (a,b)$ и функцията $f(x)$ не е ограничена в никоя околност на тази точка, тогава по дефиниция $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mu\to 0}}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\mu}^b f(x)dx\right]$, където ε и μ клонят към 0, независимо едно от друго.

Ще отбележим, че ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b)$, $b-$ особена точка, то чрез смяна на променливата $x=b-\frac{1}{t}, t>0$, несобственият интеграл от втори род се свежда към несобствен интеграл от първи род.

Несобствените интеграли могат да бъдат интегрирани по части. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснато диференцируеми в интервала $[a,+\infty)$ и $L=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x).g(x)$. Тогава, ако е сходящ поне единият от несобствените интеграли $\int\limits_a^\infty f(x)g'(x)dx$, $\int\limits_a^\infty f'(x)g(x)dx$, то е сходящ и другият и е в сила следната формула:
$\int\limits_a^\infty f(x)g'(x)dx = L - f(a).g(a) - \int\limits_a^\infty f'(x)g(x)dx$.

Задача 2.1. Изследвайте за сходимост интегралите и ако е възможно, намерете стойностите им:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\ln 2} e^x\,dx$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+8x+15}\,dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ д) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x^3+2x}{6x^4+5x^2+3x+2}\,dx$.

Решения:

а) Функцията $\frac{1}{1+x^2}$ е непрекъсната в $[0,+\infty)$ и затова е интегруема във всеки негов затворен подинтеграл. Търсим границата:

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{A}\right) = \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

Според дефиниция 2.1 интегралът е сходящ и $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

б) За $\alpha < \ln 2$ пресмятаме:

$$\int\limits_{\alpha}^{\ln 2} e^x\,dx = e^x \Big|_{\alpha}^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^{\alpha} = 2 - e^{\alpha} \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{\ln 2} e^x\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}(2-e^{\alpha}) = 2.$$

Според дефиниция 2.1 интегралът е сходящ и $\int\limits_{-\infty}^{\ln 2} e^x\,dx = 2$.

в) Прилагаме дефиницията т.е. търсим $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{1}^{A} \frac{1}{x^2+8x+15}\,dx$. След което пресмятаме определения интеграл, но преди това представяме подинтегралната функция във вида $\frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{1}{2(x+3)} - \frac{1}{2(x+5)}$, и съответно $\int\limits_{1}^{A} \frac{1}{x^2+8x+15}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{A} \frac{1}{x+3}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{A} \frac{1}{x+5}\,dx == \frac{1}{2}\ln|x+3|\Big|_{1}^{A} - \frac{1}{2}\ln|x+5|\Big|_{1}^{A} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(A+3) - \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln(A+5) + \frac{1}{2}\ln 6 = \frac{1}{2}\ln\frac{A+3}{A+5} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Накрая пресмятаме и $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_1^A \frac{1}{x^2+8x+15}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\left[\ \ln\frac{A+3}{A+5}+\ln\frac{3}{2}\right]=\frac{1}{2}\ \ \ln\frac{3}{2}$, защото $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{A+3}{A+5}=1$ и $\lim\limits_{A\to+\infty}\ln\frac{A+3}{A+5}=\ln 1=0$.

г) Даденият несобствен интеграл е с две безкрайни интеграционни граници. За да покажем сходимостта му, трябва да покажем сходимостта на всеки един от двата несобствени интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{c}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx,$$

където c е произволно число. Както в а), лесно получаваме, че $\int\limits_{c}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} c$.

Първия интеграл пресмятаме според дефиниция 2.1:

$$\int\limits_{-\infty}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg}\Big|_{\alpha}^{c}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-\infty}(\operatorname{arctg} c-\operatorname{arctg}\alpha)=\operatorname{arctg} c-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{arctg} c+\frac{\pi}{2}.$$

Окончателно получаваме, че даденият интеграл е сходящ и стойността му е равна на:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{c}\frac{1}{1+x^2}dx+\int\limits_{c}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg} c+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} c=\pi.$$

д) Подинтегралната функция приема в интервала $[2,+\infty)$ само положителни стойности. Преобразуваме я по следния начин:

$$\frac{x^3+2x}{6x^4+5x^2+3x+2}=\frac{x^3.\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^4.\left(6+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\frac{1}{x}.\frac{1+\frac{2}{x^2}}{6+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}} \qquad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3+2x}{6x^4+5x^2+3x+2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{6+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=\frac{1}{6},$$

защото $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^4}=0$. Тъй като $\frac{1}{6}>0$ и $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ е разходящ, то според следствие 2.1 и даденият интеграл е разходящ.

Задача 2.2. Докажете, че интегралът $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ е сходящ.

Решение:

Тъй като $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, то интегралът няма особена точка при $x=0$, така че вместо $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$, може да разглеждаме $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. За последния интеграл прилагаме критерия на Дирихле (теорема 2.3) . Може да считаме, че $f(x)=\sin x$ – непрекъсната функция, и нейната примитивна $\int\sin xdx-\cos x$ е ограничена. За $g(x)=\frac{1}{x}$ е ясно, че е монотонна функция, при това $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Тогава съгласно теорема 2.3 интегралът е сходящ.

Сходимостта на дадения интеграл може да бъде получена и като се приложи формулата за интегриране по части, а именно:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=-\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}d\cos x=-\frac{\cos x}{x}\Bigg|_{1}^{+\infty}-\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}+\cos 1-\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx=\cos 1-\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Очевидно е следното неравенство: $\frac{|\cos x|}{x^2}<\frac{1}{x^2}$ за всяко $x>1$, а оттук и $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}dx<\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$. От по-горе знаем, че $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ е сходящ, и съгласно признака за сравнение (теорема 2.2) следва сходимостта на $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}dx$. Тогава след граничен преход $A\to+\infty$ в равенството $\int\limits_{1}^{A}\frac{\sin x}{x}dx=\cos 1-\int\limits_{1}^{A}\frac{\cos x}{x^2}dx$ получаваме, че $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ е сходящ.

Задача 2.3. Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,.\ln x}{x+1}dx$.

Решение:

Преобразуваме подинтегралната функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}.\ln x}{x+1}$, която приема в интервала $[1,+\infty)$ само положителни стойности, по следния начин:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}.\ln x}{x+1}=\frac{\sqrt{x}\quad.\;\ln x}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\quad.\quad\frac{\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\quad.\quad\frac{\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}.\text{ Нека } g(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\text{, тогава}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x}.\ln x}{x+1}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty\text{ , защото }\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\text{ и }\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

Тъй като $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ е разходящ $\left(\frac{1}{2}<1\right)$, то според следствие 2.1 и даденият интеграл е разходящ.

Задача 2.4. Намерете за какви стойности на реалния параметър λ интегралът $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}5x}{x^{\lambda}}dx$ е сходящ.

Решение:

Нека да представим интеграла като сума от следните два, а именно:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}5x}{x^{\lambda}}dx=\int_0^{a}\frac{\operatorname{arctg}5x}{x}.\frac{1}{x^{\lambda-1}}dx+\int_a^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}5x}{x^{\lambda}}dx=I_1+I_2.$$

Разглеждаме интеграла I_1, при който особената точка е $x=0$. Тъй като

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{x}\dfrac{1}{x^{\lambda-1}}}{\dfrac{1}{x^{\lambda-1}}}=\lim\frac{\operatorname{arctg}5x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{arctg}5x)'}{(x)'}=\lim_{x\to0}\frac{5}{1+(5x)^2}=5,$$

то I_1 и $\int_0^{a}\frac{1}{x^{\lambda-1}}dx$ са едновременно сходящи или разходящи. Но последният интеграл е сходящ само когато $\lambda-1<1$, т.е. $\lambda<2$.

С интеграла I_2 постъпваме аналогично. Тъй като: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{x^{\lambda}}}{\dfrac{1}{x^{\lambda}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}5x=\dfrac{\pi}{2}$, то

I_2 и $\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\lambda}}dx$ са едновременно сходящи или разходящи, а последният е сходящ само когато $\lambda>1$.

Окончателно получаваме, че даденият интеграл само при $\lambda\in(1,2)$.

§2.2. Ойлерови интеграли

Дефиниция 2.5. Интегралът $\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$, който е сходящ при $p>0$, се нарича гама-функция (Ойлеров интеграл от първи род).

Гама-функцията е непрекъсната и притежава непрекъснати производни от произволен ред при $p>0$, които се намират чрез диференциране по параметъра *p*, т.е.

$$\Gamma^{(k)}(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}\ln^k x.e^{-x}dx\,,\ k\in\mathbb{N}\,.$$

Основни свойства:

При $p>0$

1. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$;

2. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

3. $\Gamma(n)=(n-1)!,\ n\in\mathbb{N}$;

4. $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

При $0<p<1$

5. $\Gamma(p).\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$.

Дефиниция 2.6. Интегралът $B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$, който е сходящ при $p>0$, $q>0$, се нарича бета-функция (Ойлеров интеграл от втори род). Бета-функцията е непрекъсната в областта $D=\left\{(p,q)\in\mathbb{R}^2 : p>0, q>0\right\}$ и притежава непрекъснати частни производни спрямо p и q от произволен ред, които се намират чрез диференциране на горния интеграл по съответния параметър.

Основни свойства:

6. При $p>0,\ q>0$ е в сила $B(p,q)=B(q,p)$;
7. При $p>1,\ q>0$ е в сила $B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}.B(p-1,q)$;
8. При $p>0,\ q>1$ е в сила $B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}.B(p,q-1)$;
9. При $n,m\in\mathbb{N}$ е изпълнено $B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$.
10. Връзката между гама- и бета-функции е следната: $B(p,q)=\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Задача 2.5. Като изпозвате свойствата на гама- и бета-функциите, пресметнете интегралите:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$;

б) $\int\limits_0^a x^2.\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$;

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$;

д) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x.\cos^4 x dx$;

е) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.

Решения:

а) Правим следните преобразувания:

$$J=\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}dx=\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx=\int\limits_0^1 \sqrt{x}.\sqrt{1-x}dx=\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).$$

Като изпозваме връзката между бета- и гама-функцията, получаваме, че $J=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}$. Последователно прилагаме свойства 1, 2 и 3 и намираме

$$J=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.1}=\frac{\pi}{8}.$$

б) В дадения интеграл $J=\int\limits_0^a x^2.\sqrt{a^2-x^2}dx$ полагаме $\frac{x^2}{a^2}=t \quad (t>0)$ и пресмятаме $dx=da\sqrt{t}=\left(a\sqrt{t}\right)' dt=\frac{a}{2\sqrt{t}}dt$. Новите граници в интеграла са: при $x=0 \ \rightarrow \ t=\frac{0^2}{a^2}=0$ и при $x=a \ \rightarrow \ t=\frac{a^2}{a^2}=1$. След заместване в J имаме $\int\limits_0^1 a^2t.\sqrt{a^2-a^2t^2}\,\frac{a}{2\sqrt{t}}dx=$

$\frac{a^4}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t^2}dt$. Очевидно стигнахме до решаване на предходната задача, а оттам – и до отговора, който е $J=\frac{a^4}{2}.\frac{\pi}{8}=\frac{\pi.a^4}{16}$.

в) Привеждаме интеграла в следния вид: $J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx=$

$= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}} dx$. Ясно е, че $p = \frac{5}{4}$, $q = \frac{3}{4}$ и съответно $J = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Като използваме последователно свойства 6, 10, 1 и 5, получаваме

$$J = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

г) Полагаме $x^3 = t$. Пресмятаме $dx = dt^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.t^{-\frac{2}{3}}dt$ и новите граници на интеграла при $x = 0 \quad \to \quad t = 0$, а при $x = +\infty \quad \to \quad t = +\infty$. Заместваме в изходния интеграл $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{3(1+t)} dt = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{3}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} dt = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Използвайки отново свойства 10, 3 и 5 на Ойлеровите интеграли, получаваме следното:

$$J = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.\frac{\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

д) На пръв поглед и този интеграл не прилича на никой от Ойлеровите. След смяна на променливото $t = \sin^2 x$ и необходимите ни $dx = d\arcsin\sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}\left(\sqrt{t}\right)' dt =$ $= \frac{1}{\sqrt{1-t}}.\frac{1}{2.\sqrt{t}} dt$ и граници при $x = 0 \;\to\; t = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} \;\to\; t = 1$, интегралът придобива вида: $J = \int_0^1 t^3.\left(\sqrt{1-t}\right)^2 \frac{1}{2.\sqrt{t}.\sqrt{1-t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}\left(1-t\right)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{7}{2}-1}(1-t)^{\frac{5}{2}-1} dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Сега вече сме наясно, че това е бета-функция и използваме връзката й с гама-функцията и свойства 3 и 4:

$$J = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{15}{8}.\sqrt{\pi}.\frac{3}{4}.\sqrt{\pi}}{120} = \frac{3\pi}{512},$$ защото

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)=\frac{5!!}{2^3}.\sqrt{\pi}=\frac{1.3.5}{8}.\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}.\sqrt{\pi}\ ,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{3!!}{2^2}.\sqrt{\pi}=\frac{1.3}{4}.\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}.\sqrt{\pi}\quad \text{и}$$

$$\Gamma(6)=(6-1)!=5!=1.2.3.4.5=120\,.$$

е) След като запимем интеграла във вида $J=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}=\int\limits_0^1\frac{dx}{x.\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}-1}}$, полагаме $t=\frac{1}{\frac{1}{x^n}-1}$,

откъдето $\frac{1}{x^n}-1=\frac{1}{t}$ и $x=\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Пресмятаме $dx=d\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{n}-1}.\frac{1}{(t+1)^2}dt=\frac{1}{n}.\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(t+1)^{\frac{1}{n}+1}}dt$

и новите граници при $x=0\to t=0$, $x=1\to t=+\infty$. Тогава

$J=\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{n}}}.t^{\frac{1}{n}}.\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(t+1)^{\frac{1}{n}+1}}dt=\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{(t+1)^{\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}}}dt=\frac{1}{n}.B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$, защото

$$B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{n}\pi}\,.$$

Задача 2.6. Изразете чрез Ойлеровите интеграли следните интеграли и определете областта на сходимост на всеки от тях:

а) $J=\int\limits_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx$;

б) $J=\int\limits_1^3\frac{(x-1)^m(3-x)^n}{(x+2)^{m+n+2}}dx$;

в) $J=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx,\quad 0<|k|<1$.

Решения:

а) При $n>0$ извършваме субституцията $x=t^{\frac{1}{n}}$ $(t>0)$, $dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$ и границите на интеграла се запазват. Получаваме, че $J=\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$.

При $n<0$ подхождаме по аналогичен начин, полагаме $n=-n_1$ ($n_1>0$), извършваме субституцията $x=t^{-\frac{1}{n_1}}$ $(t>0)$ и получаваме

$$J=\frac{1}{n_1}\int\limits_0^{+\infty}t^{-\frac{m+1}{n_1}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n_1}-1}e^{-t}dt=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

Като обединим двата случая, получаваме, че $J=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$. Тъй като функцията $\Gamma(p)$ е определена при $p>0$, то окончателно имаме, че даденият интеграл е сходящ при $\frac{m+1}{n}>0$.

б) Нека запишен интеграла по следния начин:

$$J=\int\limits_1^3\frac{(x-1)^m(3-x)^n}{(x+2)^{m+n+2}}dx=J=\int\limits_1^3\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^m.\left(\frac{3-x}{x+2}\right)^n.\frac{1}{(x+2)^2}dx.$$

Полагаме $\frac{x-1}{x+2}=at$, като числото a избираме така, че $\frac{3-x}{x+2}=b(1-t)$ за някое реално число *b*. От първото равенство намираме $x=\frac{2at+1}{1-at}$. Като заместим x с получения израз във второто равенство и преобразуваме, получаваме, че $\frac{-5at+2}{3}=b(1-t)$ при всяко t. След приравняване на коефициентите пред t се оказва, че това е възможно само при $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{2}{3}$. Следователно

$$x=\frac{4t+5}{5-2t},\ dx=\frac{30}{(5-2t)^2}dt,\ x+2=\frac{15}{5-2t},\ \frac{3-x}{x+2}=\frac{2}{3}(1-t).$$

Тогава, след като заместим в преработения интеграл, получаваме

$$J=\frac{2^{m+n+1}}{5^{m+1}.3^{n+1}}.\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt=\frac{2^{m+n+1}}{5^{m+1}.3^{n+1}}.B(m+1,n+1)\,.$$

Следователно съгласно дефиницията за бета-функция интегралът е сходящ при $m>-1$ и $n>-1$.

в) Полагаме $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Съответно $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ и границите на интеграла са при $x=0\to t=0$ и $x=\pi\to t=+\infty$. Получаваме $J=\frac{2^n}{(1+k)^n}.\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(1+\alpha^2t^2)^n}dt$, където $\alpha=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$.

Налага се да направим още едно полагане, за да приведем интеграла до типичната бета-функция. Това се прави чрез полагането $\alpha t=\sqrt{z}$ $(z>o)$, очевидно границите на интеграла се запазват, а $dt=\frac{1}{2\alpha\sqrt{z}}dz$. Тогава

$$J=\frac{2^n}{(1+k)^n}.\frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{z}\big/\alpha\right)^{n-1}}{(1+z)^n}.\frac{1}{\sqrt{z}}dz=\frac{2^{n-1}}{(1+k)^n}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^n\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}}dz=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}.\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{n}{2}-1}}{(1+z)^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}}dz=$$

$$=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}.B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right).$$

Следователно даденият интеграл е сходящ при $n>0$.

§2.3. Задачи за самоподготовка

1. Изследвайте за сходимост интегралите и ако е възможно, пресметнете стойностите им:

а) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3+x}dx$;

б) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$;

в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x.\sqrt[3]{x^2+1}}dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} x e^x dx$;

д) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2+x^2}{x^4 .e^x}dx$.

2. Като изпозвате свойствата на гама- и бета-функциите, пресметнете интегралите:

а) $J = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}$;

Упътване: Чрез субституцията $x = \sqrt{t}$ докажете, че $J = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

б) $J = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx,\ n > 0$;

Упътване: Направете субституцията $x = t^{\frac{1}{n}}$.

в) $J = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} tg^n x dx, \quad |n| < 1$;

Упътване: Направете субституцията $\mathrm{tg}x = \sqrt{t}$.

г) $J = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x}dx$;

Упътване: Положете $x = t^{\frac{1}{3}}$ и използвайте задача 3.5 е).

3. Изразете чрез Ойлеровите интеграли следните интеграли и определете областта на сходимост на всеки от тях:

а) $J = \int\limits_{0}^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$;

Упътване: Положете $\ln\frac{1}{x} = t$ и покажете, че $J = \Gamma(p+1)$.

б) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x.\cos^n x dx$;

Упътване: Направете субституцията $\sin x = \sqrt{t}$ и докажете, че $J = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$.

в) $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}$.

Тема 3. РЕДОВЕ НА ФУРИЕ

§3.1. Предварителни бележки

Дефиниция 3.1. Една функция $f(x)$, определена за всяко $x \in \mathbb{R}$, се нарича *T-периодична*, когато за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Дефиниция 3.2. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $\left[-\pi, \pi\right]$, то редът

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

се нарича *тригонометричен ред на Фурие,* или за краткост *ред на Фурие* за функцията $f(x)$. Реалните числа a_0, a_n и b_n, $n = 1, 2, 3...$ се наричат коефициенти на реда и са съответно равни на:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \ , \ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \text{ и } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \ , \ n = 1, 2, 3...$$

.

Ако вместо интервала $\left[-\pi, \pi\right]$ разгледаме интервала $\left[-l, l\right]$, тогава ред на Фурие се нарича редът:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}),$$

където

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx \ , \ a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \ , \ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \ .$$

За абсолютно интегруема функция (интегруема по абсолютна стойност) коефициентите на Фурие a_n и b_n клонят към нула при $n \to \infty$.

Теорията на редовете на Фурие е свързана с възможността за представяне на една 2π -периодична функция във вид на тригонометричен ред.

Дефиниция 3.3. Една функция $f(x)$ се нарича частично непрекъсната в интервала $[-\pi,\pi]$, ако тя е непрекъсната във всяка точка на $[-\pi,\pi]$, освен може би в краен брой точки, в които тя има прекъсване от първи род.

Дефиниция 3.4. Ако $f(x)$ и $f'(x)$ са частично непрекъснати функции, ще казваме, че $f(x)$ е *частично гладка*.

Теорема 3.1. *(Теорема на Дирихле)* Нека частично гладката функция $f(x)$ е 2π-периодична за всяко $x\in\mathbb{R}$. Тогава за всяко $x\in\mathbb{R}$ тригонометричният ред на Фурие е сходящ и има за сума величината, равна на полусбора от лявата и дясната граница на функцията в тази точка, т.е.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

(при това сходимостта е равномерна във всяка отсечка, лежаща вътре в участъка на гладкост на $f(x)$).

§3.2. Развитие на функция в ред на Фурие

Предвид теоремата на Дирихле може да се заключи, че ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[-\pi,\pi]$, частично гладка в него, и $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогава редът на Фурие за $f(x)$ е равномерно сходящ в $[-\pi,\pi]$ и има за сума $f(x)$.

Нека $f(x)$ е непрекъсната, нека е непрекъсната и $f'(x)$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогава редът на Фурие за производната $f'(x)$ се получава от реда на Фурие за функцията $f(x)$ чрез почленно диференциране. Ще отбележим също, че редът на Фурие за абсолютно интегруема в интервала $[-\pi,\pi]$ функция може да се интегрира почленно в този интервал.

Задача 3.1. Нека функцията $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ за } -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{\pi}, \text{ за } 0<x \le \pi \end{cases}$ е продължена периодично върху интервала $(-\infty,+\infty)$. Развийте $f(x)$ в ред на Фурие в интервала $[-\pi,\pi]$.

Решение:

Очевидно продължената функция е непрекъсната за всяко x (рис 3.1). Производната й $f'(x)=-1$ за $-\pi<x<0$ и $f'(x)=2x/\pi$ за $0<x<\pi$ е определена и непрекъсната навсякъде, освен в точките $x=\pi k \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,...)$, където $\lim\limits_{x\to \pi k^-}(-x)=-\pi k \ne \lim\limits_{x\to \pi k^+}(x^2/\pi)=\pi k^2$.

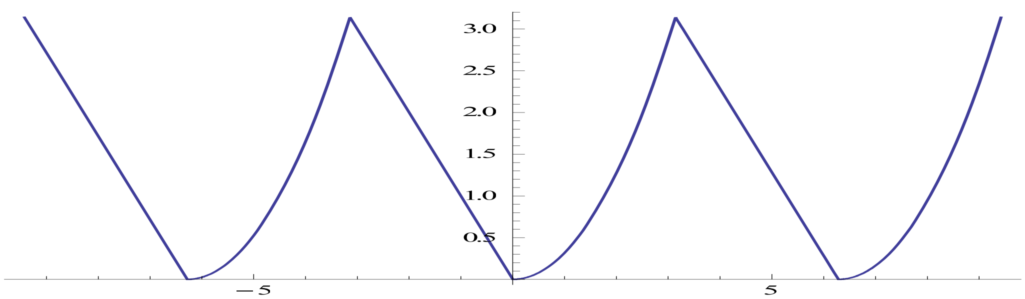

Рис. 3.1

Следователно съгласно теорема 3.1 редът на Фурие за $f(x)$ е сходящ за всяко x и има за сума периодичното продължение на $f(x)$, т.е. $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

Остава да пресметнем коефициентите на реда посредством известните ни формули:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3\pi}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3\pi}=\frac{5}{6}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nx dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{0}^{-\pi}(-x\cos nx)dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nx dx\right)$$

Сменяйки границите и считайки, че $x=-t$, в първия интеграл достигаме до следната сума:

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x\cos nxdx+\int_0^\pi\frac{x^2}{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x+\frac{x^2}{\pi})\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi(x+\frac{x^2}{\pi})d\sin nx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[(x+\frac{x^2}{\pi})\sin nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi(1+\frac{2x}{\pi})\sin nxdx\right]=-\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi(1+\frac{2x}{\pi})\sin nxdx=$$

$$\frac{1}{n^2\pi}\int_0^\pi(1+\frac{2x}{\pi})d\cos nx=\frac{1}{n^2\pi}\left[(1+\frac{2x}{\pi})\cos nx\Big|_0^\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[(1+\frac{2\pi}{\pi})\cos n\pi-1-\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^\pi\right]=\frac{1}{n^2\pi}\left[3\cos n\pi-1\right].$$

Тъй като $\cos n\pi=\begin{cases}1, & n=2k\\-1, & n=2k+1\end{cases}$, окончателно можем да запишем, че $a_n=\dfrac{3(-1)^n-1}{n^2\pi}$.

По аналогичен начин пресмятаме и останалите коефициенти b_n на реда на Фурие:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\int_0^\pi\frac{x^2}{\pi}\sin nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\frac{x^2}{\pi}-x)\sin nxdx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi(\frac{x^2}{\pi}-x)d\cos nx=-\frac{1}{n\pi}\left[(\frac{x^2}{\pi}-x)\cos nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi(\frac{2x}{\pi}-1)\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi(\frac{2x}{\pi}-1)\cos nxdx=+\frac{1}{n^2\pi}\int_0^\pi(\frac{2x}{\pi}-1)d\sin nx=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[(\frac{2x}{\pi}-1)\sin nx\Big|_0^\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin nxdx\right]=\frac{2}{n^3\pi^2}\cos nx\Big|_0^\pi=\frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n-1\right],\text{ т.е.}$$

$$b_n = \frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] \text{ или } b_n = \begin{cases} 0, & \text{при четно } n \\ -\dfrac{4}{n^3\pi^2}, & \text{при нечетно } n \end{cases}.$$

Тогава за развитието на $f(x)$ получаваме:

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\right] \text{за всяко } x \in \mathbb{R}.$$

Задача 3.2. Нека $f(x)$ е 2π – периодична функция, определена по следния начин:

$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } -\pi \le x < 0 \\ 1, & \text{при } 0 \le x < \pi \end{cases}$. Развийте в тригонометричен ред на Фурие $f(x)$.

Решение:

Функцията е частично гладка, при което има прекъсване от първи род само в точките $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ защото $\lim\limits_{x \to k\pi^-}(-1) = -1$ и $\lim\limits_{x \to k\pi^+} 1 = 1$. Веднага може да заключим (теорема 3.1), че в тези точки редът на Фурие има за сума $\left[f(k\pi + 0) + f(k\pi - 0)\right]/2 = 0$. Остава да пресметнем сумата му за всички останали реални числа. Следвайки формулите за коефициентите, имаме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = \frac{1}{\pi}(-x)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi} = -1 + 1 = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cos nxdx = -\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx = \frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\big(1-\cos(-\pi n)\big) - \frac{1}{\pi n}\big(\cos(-\pi n)-1\big) = \frac{2}{\pi n}(1-\cos\pi n) = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)\,,\ n=1,2,3,\ldots$$

Очевидно и тук $b_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четно} \\ \dfrac{4}{\pi n}, & \text{при } n \text{ нечетно} \end{cases}$ и тогава за реда на Фурие намираме

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad \forall\ x \neq k\pi\,, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ако положим $x = \dfrac{\pi}{2}$, ще получим следното интересно равенство:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

На следващата рисунка е дадена графиката на $f(x)$ заедно с графиката на частичните суми на реда при n=5 и n=21. Вижда се, че с увеличаването на броя на членовете осцилациите на реда намаляват и той се доближава до стойностите на функцията в точките на непрекъснатост. Около точките на прекъсване осцилациите са най-устойчиви и апроксимирането на функцията е по-лошо, отколкото в точките на непрекъснатост. Това явление се нарича *феномен на Гибс*. Той е общо правило и в известен смисъл е цената, която плащаме за развитието в ред на функции, които не са непрекъснати.

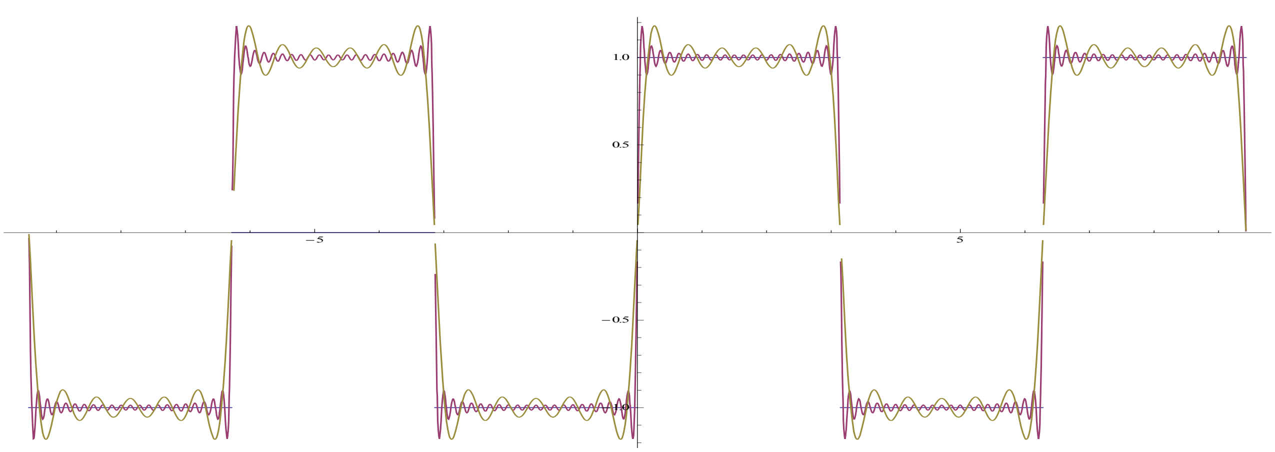

Рис. 3.2

Задача 3.3. Нека $f(x)$ е периодична функция с период *T=6,* за която е дадено $f(x)=\frac{x}{3}-1$ за $x\in(0,6]$. Да се представи $f(x)$ в ред на Фурие.

Решение: Дадената функция е частично гладка с изключение на точките $x=6k$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3...$ Съгласно теорема на Дирихле за всяко $x\in\mathbb{R}$ тригонометричният ред на Фурие е сходящ и има сума, равна на полусбора от лявата и дясната граница на функцията в тази точка. За точките, в които имаме прекъсване, $x=6k$:

$$\frac{f(6k+0)+f(6k-0)}{2}=\left[\lim_{x\to 6k^{+}}\left(x/3-1\right)+\lim_{x\to 6k^{-}}\left(x/3-1\right)\right]/2=(-1+1)/2=0\,.$$

Продължаваме с пресмятанията на коефициентите на реда за всички останали *x*. Тук вместо интервала $[-\pi,\pi]$ имаме $[-3,3]$. Използвайки свойството на определения интеграл за периодична функция с период l : $\int_a^b g(x)dx=\int_{a+l}^{b+l} g(x)dx$, пресмятаме коефициентите на реда на Фурие:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^6(\frac{x}{3}-1)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{6}-x\right)\Bigg|_0^6=\frac{1}{3}(6-6)=0$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{3}\int_0^6(\frac{x}{3}-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_0^6\frac{x}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx-\int_0^6\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=\frac{1}{3}\left(I_1-I_2\right).$$

За I_1 внасяме косинуса под диференциала и интегрираме по части:

$$I_1=\int_0^6\frac{x}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{n\pi}\int_0^6 xd\sin\frac{n\pi x}{3}=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^6-\int_0^6\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[6\sin(2\pi n)-0\sin 0+\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^6\right]=\frac{3}{n^2\pi^2}\left[\cos(2\pi n)-\cos 0\right]=0$$

За I_2 получаваме $I_2=\int\limits_0^6 \cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^6=\frac{3}{n\pi}\left[\sin(2\pi n)-\sin 0\right]=0$.

Окончателно $a_n=\frac{1}{3}\left(I_1-I_2\right)=0$. По аналогичен начин пресмятаме и b_n,

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^6\left(\frac{x}{3}-1\right)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int\limits_0^6\frac{x}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx-\int\limits_0^6\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]=\frac{1}{3}\left[G_1-G_2\right].$$

Отсега знаем, че вторият интеграл е нула (виж в I_1 по-горе), тогава за G_1 имаме:

$$G_1=\int\limits_0^6\frac{x}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=-\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^6 xd\cos\frac{n\pi x}{3}=-\frac{1}{n\pi}\left[\left(x\cos\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_0^6-\int\limits_0^6\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[6\cos(2n\pi)-0\cos 0-0\right]=-\frac{1}{n\pi}(6-0)=-\frac{6}{n\pi}.$$

Интегралът от косинус е нула, видяхме го по-горе в пресмятането на I_2. Следователно за b_n имаме $b_n=\frac{1}{3}\left[G_1-G_2\right]=\frac{1}{3}\left[-\frac{6}{n\pi}-0\right]=-\frac{2}{n\pi}$.

Развитието на $f(x)$ в ред на Фурие е:

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{3} \text{ за всяко } x\neq 6k,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

Задача 3.4. Да се развие в ред на Фурие функцията $f(x)=\begin{cases}1-2x\ ,\ x\in[-2,-1]\\ 5+2x\ ,\ x\in[-1,0]\end{cases}$ в интервала $(-\infty,\infty)$.

Решение: Очевидно функцията е дефинирана в интервал, неудобен за изчисленията ни, затова полагаме $x = t - 1$ и трансформираме $f(x)$ във функцията $g(t) = \begin{cases} 3-2t \ , \ t \in [-1,0] \\ 3+2t \ , \ t \in [0,1] \end{cases}$, която може да се продължи до периодична, непрекъсната и частично гладка функция върху цялата реална права, при това $g(-1) = g(1)$. Тогава редът на Фурие ще е сходящ за всяко t и сумата му ще е $g(t)$, респективно $f(x)$. Периодът на функцията $g(t)$ е равен на дължината на интервала $\left([-1,1]\right)$, в който първоначално тя е дефинирана и е $l = 1$. Вече можем да започнем пресмятането на коефициентите на реда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt = \int_{-1}^{o}(3-2t)dt + \int_{0}^{1}(3+2t)dt = -\frac{1}{2}\frac{(3-2t)^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\frac{(3+2t)^2}{2}\bigg|_{0}^{1} = -\frac{1}{2}.\frac{9-25}{2} + \frac{1}{2}.\frac{25-9}{2} = 4.$$

За a_n, както при примерите по-горе, ще внесем косинус под диференциала и след това ще използваме формулата за интегриране по части:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l} = \int_{-1}^{0}(3-2t)\cos n\pi t dt + \int_{0}^{1}(3+2t)\cos n\pi t dt =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\int_{-1}^{0}(3-2t)d\sin n\pi t + \int_{0}^{1}(3+2t)d\sin n\pi t\right] = \frac{1}{n\pi}\left[I_1 + I_2\right].$$

Предвид обема на формулите, ще пресметнем двата интеграла поотделно:

$$I_1 = (3-2t)\sin n\pi t\Big|_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}\sin n\pi t dt = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi t\Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{n\pi}(\cos 0 - \cos n\pi) = -\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$I_2 = (3+2t)\sin n\pi t\Big|_{0}^{1} + 2\int_{0}^{1}\sin n\pi t dt = \frac{2}{n\pi}\cos n\pi t\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right).$$

Окончателно за a_n получаваме $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четно} \\ \frac{-8}{n^2\pi^2}, & \text{при } n \text{ нечетно} \end{cases}$.

По аналогичен начин пресмятаме и b_n:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt = \int_{-1}^{0}(3-2t)\sin n\pi t\,dt + \int_{0}^{1}(3+2t)\sin n\pi t\,dt = G_1 + G_2$$

$$G_1 = -\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}(3-2t)d\cos n\pi t = -\frac{1}{n\pi}\left[(3-2t)\cos n\pi t\Big|_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}\cos n\pi t\,dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[3\cos 0 - 5\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\sin n\pi t\Big|_{-1}^{0}\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[3 - 5\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\left(\sin 0 + \sin n\pi\right)\right] = \frac{5\cos n\pi - 3}{n\pi}$$

$$G_2 = -\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}(3+2t)d\cos n\pi t = -\frac{1}{n\pi}\left[(3+2t)\cos n\pi t\Big|_{0}^{1} - 2\int_{0}^{1}\cos n\pi t\,dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[5\cos n\pi - 3\cos 0 - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi t\Big|_{0}^{1}\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[5\cos n\pi - 3 - \frac{2}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0)\right] = \frac{3 - 5\cos n\pi}{n\pi}.$$

Следователно $b_n = G_1 + G_2 = \frac{-3 + 5\cos n\pi}{n\pi} + \frac{3 - 5\cos n\pi}{n\pi} = 0$.

Редът на Фурие за $g(t)$ е следният:

$$g(t) = 4 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi t, \text{ за всяко } t.$$

Като се върнем към променливото x, съответно и към $f(x)$, посредством направеното полагане $t = x + 1$, тогава окончателно получаваме

$$f(x) = 4 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi(x+1) =$$

$$= 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos(2k-1)\pi x \text{, за всяко } x.$$

§3.3. Разлагане на четна и нечетна функция в ред на Фурие

Лесно може да се покаже, че:

1) Ако една функция $f(x)$ е четна, то редът на Фурие има вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, т.е $b_n = 0$ и $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$, $n = 0,1,2...$

2) Ако функцията $f(x)$ е нечетна, то редът на Фурие има вида $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, т.е. $a_n = 0$, $n = 0,1,2...$ и $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$, $n = 1,2...$.

При развитие на $f(x)$ за $x \in (0,l)$ в ред на Фурие, само по синуси, е необходимо да се продължи $f(x)$ в $(-l,l)$, така че да се получи нечетна функция, и развиваме получената функция. По аналогичен начин, ако за $f(x)$, $x \in (0,l)$ се иска да се представи в сума от косинуси, то продължаваме $f(x)$ в $x \in (-l,l)$, така че да се получи четна функция, и представяме нея в ред на Фурие.

Задача 3.5. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = x$ по косинуси.

Решение: За да получим развитието на функцията x по косинуси (в интервала $[0,\pi]$), ще трябва най-напред да продължим $f(x)$ до четна функция, т.е. $f(x) = |x|$ за $x \in [-\pi,\pi]$. След това можем да продължим $f(x)$ до $f_1(x)$ периодично върху цялата реална ос, при това $f(-\pi) = f(\pi) = \pi$. Функцията $f_1(x)$ е непрекъсната навсякъде и частично гладка. Следователно редът на Фурие за тази функция е сходящ навсякъде и има за сума $f_1(x)$. Кофициентите на реда са следните:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 0) = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} xd\sin nx = \frac{2}{n\pi}\left[\left. x\sin nx\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nxdx\right] = \frac{2}{n\pi}\left[\pi\sin n\pi - 0 + \frac{1}{n}\left.\cos nx\right|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos n\pi - \cos 0\right] = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \text{ т.е. } a_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четно} \\ \dfrac{-4}{n^2\pi}, & \text{при } n \text{ нечетно} \end{cases}.$$

$$b_n = 0\,,\ n = 0,1,2...$$

Тогава за $x \in [0,\pi]$ получаваме равенството $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

Интересен резултат би се получил, ако положим $x = 0$, а именно:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} + ...$$

Задача 3.6. Да се развие в ред на Фурие само по синуси следната функция:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{4}, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$$

Решение: За да развием функцията по синуси, трябва да е додефинираме като нечетна функция, т.е $f(-x) = -f(x)$ за всяко $x \in (-\infty,+\infty)$, а геометрично това означава графиката на новата функцията да е централно симетрична . Графиката на $f(x)$ е дадена на рис. 3.3, а на допълващата я нечетна функция в интервала $[-\pi, \pi]$ – на рис. 3.4.

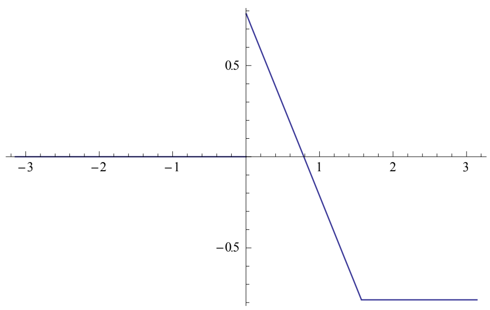

Рис. 3.3

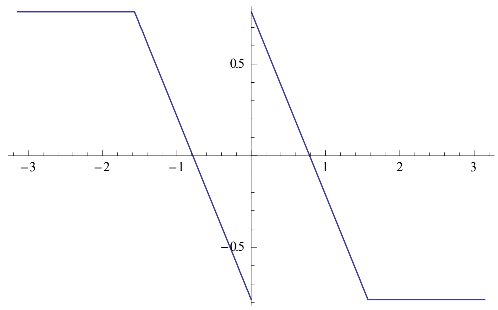

Рис. 3.4

Централно симетричната $F(x)$ очевидно ще се дефинира по следния начин:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x \in [-\pi, -\pi/2] \\ -\dfrac{\pi}{4} - x, & x \in [-\pi/2, 0] \end{cases}.$$

Сега вече е лесно да дефинираме $f_1(x)$, на която ще търсим развитие в ред на Фурие:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x \in [-\pi, -\pi/2] \\ -\dfrac{\pi}{4} - x, & x \in [-\pi/2, 0] \\ \dfrac{\pi}{4} - x, & x \in [0, \pi/2] \\ -\dfrac{\pi}{4}, & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}.$$

Трябва да направим развитие по синуси. Тогава a_0 и a_n са нули и изчисляваме само b_n. На пръв поглед $f_1(x)$ не ни е необходима за пресмятане на коефициентите, но трябва да я напишем, за да сме сигурни, че тя съществува, защото, ако не е налице периодично продължение, няма да съществува и ред на Фурие.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{4} - x)\sin nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\frac{\pi}{4})\sin nxdx\right] = \frac{2}{\pi}[I_1 + I_2]$$

Имаме два интеграла. Нека започнем с първия, като внесем синуса под диференциала и интегрираме по части.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{4} - x)\sin nxdx = -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{4} - x)d\cos nx = -\frac{1}{n}\left[(\frac{\pi}{4} - x)\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nxd(\frac{\pi}{4} - x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{n}\left[(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\cos n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\cos 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nxdx\right] = -\frac{1}{n}\left[(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\cos n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{n}\left[(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\cos n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{2}n - \sin 0)\right] = \frac{\pi}{4n}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n} - \frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{2}n.$$

Пресмятаме и

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\frac{\pi}{4})\sin nxdx = \frac{\pi}{4n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4n}(\cos\pi n - \cos\frac{\pi}{2}n) = \frac{\pi}{4n}(-1)^n - \frac{\pi}{4n}\cos n\frac{\pi}{2}.$$

Следователно за b_n получаваме:

$$b_n = \frac{2}{\pi}[I_1 + I_2] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4n} - \frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4n}(-1)^n\right] = \frac{1}{2n} - \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{2n}(-1)^n.$$

Развитието на функцията в ред на Фурие е следното:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} - \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi}{2}n\right]\sin nx.$$

Задача 3.7. Да се развие в ред на Фурие в интервала $[-\pi,\pi]$ по косинуси функцията $f(x)=\cos ax$ (тук a не е цяло число).

Решение: Функцията $f(x)=\cos ax$ е четна, така че $b_n=0$ за $n=1,2,\ldots$ Пресмятаме

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos axdx=\frac{2}{a\pi}\sin ax\Big|_0^\pi=\frac{2}{a\pi}(\sin a\pi-\sin 0)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}.$$

Нека $n\neq 0$. Тогава

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos a\pi\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\big[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x\big]dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi \cos(a+n)xdx+\int_0^\pi \cos(a-n)xdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin(a+n)x+\frac{1}{a-n}\sin(a-n)x\right)\Bigg|_0^\pi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin(a+n)\pi+\frac{1}{a-n}\sin(a-n)\pi-\frac{1}{a+n}\sin(a+n)0+\frac{1}{a-n}\sin(a-n)0\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin(a\pi+n\pi)+\frac{1}{a-n}\sin(a\pi-n\pi)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}(\sin a\pi\cos n\pi+\sin n\pi\cos a\pi)+\frac{1}{a-n}(\sin a\pi\cos n\pi-\sin n\pi\cos a\pi)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}\sin a\pi\cos n\pi+\frac{1}{a-n}\sin a\pi\cos n\pi\right)==\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}(-1)^n\sin a\pi+\frac{1}{a-n}(-1)^n\sin a\pi\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right)=\frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}.$$

Оттук за развитието на функцията получаваме следното:

$$f(x)=\frac{\sin a\pi}{2a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}\cos nx.$$

§3.4. Задачи за самоподготовка

1. Да се развие в ред на Фурие функцията $f(x)=\pi^2-x^2$ в интервала $[-\pi,\pi]$.

2. Да се развие в ред на Фурие по косинуси за $x\in(0,\pi)$ функцията $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$.

3. Представете в тригонометричен ред на Фурие функцията: $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi\le x<0\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0\le x\le\pi\end{cases}$, в интервала $(-\pi,\pi)$.

4. Представете в тригонометричен ред на Фурие функцията $f(x)=e^{ax}$, в интервала $(-\pi,\pi)$.

5. Развийте в тригонометричен ред следните периодични функции:

   а) $f(x)=\left|\sin 2x\right|$;

   б) $f(x)=\left|\cos 2x\right|$.

6. Развийте функцията $f(x)=\sin ax$ по синуси в интервала $(-\pi,\pi)$.

7. Намерете сумите на следните тригонометрични редове:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n!}$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n!}$.

Упътване: Използвайте, че $e^z=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$, където z е комплексно число, представено във вида $z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$ и $z^n=e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Проданов, И., Н. Хаджииванов, И. Чобанов. Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане. С., Наука и изкуство, 1976.
2. Любенова, Е., П. Недевски и др. Ръководство по математически анализ – първа и втора част. С., УИ Св. Климент Охридски, 1994.
3. Витанов, А., В. Димова, Г. Караджов и др. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика. С., Техника, 1968.
4. Фихтенгольц, Г. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Наука, 1966.
5. Станков, Д. Математически анализ за студенти по икономика. Велико Търново, Фабер, 2007.
6. Тагамлицки, Я. Диференциално и интегрално смятане. С., Наука и изкуство, 1954.