Преди да започна своето кратко изложение бих искал да балагодаря за избирането ми за почетен доктор на Шуменския университет,което е голяма чест за мене.Бих искал да благодаря на ръководството,в което винаги съм срещал разбиране за всевъзможни въпроси през целия период от 22 години,в които работих като съвместител в Шуменския университет.Искам да благодаря на колегите от катедрата по Математически анализ за приятелското им отношение .

Особена благодарност искам да искажа на моите ученици:доц.д-р Галя Борисова и доц.дмн Севджан Хакъеев, с които имам плодотворно сътрудничество от дълги години,което продължава и сега.

Устойчивост на нелинейни вълни

В изучаването на нелинейни вълни през втората половина на 20 век до днешния ден бяха достигнати значителни резултати и въпреки, че основните идеи на

теорията на нелинейните вълни възникнаха в механиката на флуидите, много области на физиката са свързани с вълнови движения. Изясни се, че някои нелинейни уравнения имат универсален характер. Например, уравнението на Кортевег-де Фриз (КдФ) бе първоначално изведено при изследванията на вълни върху вода. По-късно стана ясно, че то се явява едно от най-простите уравнения съчетаващи слаба нелинейност и дисперсия, а уравновесяването на дисперсията и слабата нелинейност е общ физически процес, възникващ в най-разнообразни физически приложения. Почти всички такива уравнения имат решения от вид на уединена(изолирана вълна).

Уединената вълна представлява локализирано решение на (НЕУ) нелинейно еволюционно уравнение, притежаващо крайна енергия. Солитоните са уединени вълни, които запазват формата си след взаимодействие по между си.

След забележителната работа на Гарднер, Грин, Крускал и Миура ((1) 1967) , в която беше открит метод за решаване на уравнението на КдФ, използващ обратната задача на разсейването (ОЗР), интересът към решенията от вид изолирана вълна т.е. към солитоните силно нарасна. Бяха намерени и други нелинейни уравнения, които могат да бъдат интегрирани с помощта на обратната задача за други оператори. Фактически възникна ново направление на математическата физика, наричано метод на обратната задача (МОЗ), в което широко се прилагат най-разнообразни математически методи. Наред с това бяха предложени и нови методи за решаване на самите ОЗР, различни от класическото уравнение на Гелфанд-Левитан-Марченко.

Според мнението на мнозина учени, едно от най-големите открития в математическата физика през XX век е откриването на метода на обратната спектрална задача през 1967г. от Гарднер, Грин, Крускал

и Миура. С негова помощ стана възможно да бъдат намерени явни формули за решенията на задачата на Коши за редица нелинейни еволюционни уравнения, играещи основна роля в математичната физика. Това бе голяма изненада, тъй като се смяташе, че всичко

възможно и полезно, свързано с намирането на явни решения, е открито до началото на XX век. Изследвайки получените явни формули, бе установено също, че в редица случаи асимптотиката на решенията при $t \to \pm\infty$ представлява суперпозиция на уединени вълни. Начинът на взаимодействие на тези уединени вълни протича по начин, напомнящ за редица явления в реалния свят, например стълкновението на елементарни частици.

Това поставя на предно място въпросите за изследване устойчивостта на такива решения. Този въпрос е занимавал физиците много отдавна и в множество

физически изследвания заема централно място.

Като основен инструмент те използват линеаризирането на задачата, понеже този подход предполага по-достъпен математически апарат и често се е оказвал резултатен в други случаи. Лесно е да се види обаче, че при изследването на устойчивостта на уединени вълни, явяващи се решения на едни от най-често срещащите се уравнения: нелинейното уравнение на Шрьодингер (НУШ), уравненията на Кортевег-де Фриз (КдФ), Клайн-Гордон (КГ), синус-Гордон (СГ) и др., не води до

верни заключения. Причината е , че въпросните решения не са нито експоненциално устойчиви, нито експоненциално неустойчиви и следователно изследването на въпроса изисква по-финни методи.

Изследвания на устойчивостта на интуитивно ниво са правени в много физически работи,някой от тях съдържат интересни идеи,но интересно и важно е не само за математиката,а и за различни приложения да се проведат изледвания на устойчивостта на уединените вълни на класически нелинейни уравнения на математичната физика на строго математическо ниво.С други думи съгласно класическата концепция на Адамар,необходимо

е да се изследват съществуването и единствеността на решенията на задачата на Коши,както и непрекъсната зависимост от началните данни.А строгото определение и изследване на устойчивостта на решенията винаги е свързано с подходяща конкретна метрика.

Първото изследване на устойчивост за уравнението на (Кдф) е направено от Джефри и Какутани (2).Тяхният подход не може да се смята за удовлетворителен по две причини: първо наивно се пренася теорията на Ляпунов

върху безкрайномерни пространства и второ-не се отчита

наличието на непрекъснат спектър на диференциалния оператор на линейната задача.

Първият сериозен математически анализ в изследването на въпросите за устойчивост на уединени вълни бе направен през 1972г. от Т.Бенжамин (3).

за уравнението на Кортевег-де Фриз

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0$$

и уравнението на Бенджамин-Бона-Махони (ББМ)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$$

За дадения проблем е естествено да се разгледа орбитална устойчивост за тези вълни т.е. устойчивост относно псевдометриката

$$d(u,\varphi) = \inf_{y\in\mathbb{R}} \left\| u(\cdot,) - \varphi(\cdot + y) \right\|_1 .$$

Орбиталната устойчивост дава точност до транслация в реалния случай и точност до транслация и ротация в комплексния случай.

Бенджамин показва, че ако $u(x,t)$ е решение на съответното уравнение с начално условие $u(x,0) = u_0(x)$,

което е достатъчно близко до вълната

$\varphi(x - ct)$,

То

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \left\| u(\cdot,t) - \varphi(\cdot + y) \right\|_1$$

остава малко за всяко $t > 0$. В основата си анализа на

Бенджамин е да се покаже, че ако началното условие е близо до вълната в $H^1(\mathbb{R})$ и $F(u) = F(\varphi)$, то

$$E(u)-E(\varphi)\geq A\inf_{y\in\mathbb{R}}\left\|u(\cdot,t)-\varphi(\cdot+y)\right\|_1^2$$

където *A* е положителна константа, а *E, F* са подходящо

избрани закони за съхранение. Централна роля в горната оценка играе квадратичната форма $\langle L\varphi,\varphi\rangle$, породена от неограничения самоспрегнат оператор

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+x-\varphi$$

Горната и долната оценка за квадратичната форма са ключов елемент за получаването на горното неравенство.

За голям период от време не се появява никакво развитие за този вид задачи. Това се дължи на проблема свързан с някои изисквания

за оператора на линеаризация в теорията на Бенджамин. По късно в серия от статии (4, 5, 6, 7, 8)

са разгледани класове от уравнения от вида

$$u_t+u_x+u^p u_x-Mu_x=0$$

където *M* е псевдодиференциален оператор.

Оттогава досега изследванията в тази област

напреднаха много, но работата [3] се оказа фундаментална. Като се изключат няколко работи на П.Л.Лионс (9) и (П.Л.Лионс и Т.Казенаве)(10) където се предлага методът на концентрираната компактност, и предложеният от Грилакис, Шатан и Щтраус (11), (12) общ абстрактен подход към въпроса за устойчивост на решения на абстрактни еволюционни уравнения, множеството от останалите изследвания в една или друга степен представляват обобщение или развитие на подхода от (3). За илюстрация изброяваме работите на:

М.Вайнстейн (13)-(15) посветени на обобщеното КдФ и НУШ; Илиев и Кирчев (16, 17) посветени на обобщеното уравнение на Бенжамин-Бона-Махони и сингулярното уравнение на Шрьодингер; Бенет и др. (18) посветена на уравнението на Бенжамин-Оно (Б-О).

Ще упоменем някой резултати,свързани с изследване на устойчивостта на уединени вълни на някои известни нелинейни уравнения и изложени в издадената през 1994г (Pitman(London) заедно с издателството John Wiley and Sons, Inc., New York) монография с автори И.Илиев, К.Кирчев и Е.Христов озаглавена "Spectral methods in soliton equations".

1.Изследвано е нелинейното уравнение

на Хирота, обобщаващо комплексното нелинейно модифицирано уравнение на КдФ и нелинейното уравнение на Шрьодингер. Показано е съществуването на глобално решение на задачата на Коши в пространствата на Соболев. Доказана е орбитална устойчивост на едносолитоното решение. Разгледани са обощените нелинейни уравнения на Кортевег-де Фриз и Бенжамин-Бона-Махони. При някои естествени условия върху нелинейността е доказано съществуването

на солитоноподобни решения. Намерени са необходими и достатъчни условия за устойчивост и неустойчивост на тези солитоноподобни решения. Показани са съществуване, единственост и непрекъсната зависимост от началните данни на глобалното решение на задачата на Коши за реалното нелинейно медифицирано уравнение на Кортевег-де Фриз, когато началните данни принадлежат на пространства от функции от стъпаловиден тип. При нелинейност, удовлетворяваща определени ествствени условия, е доказано че

решението от вид бягаща вълна с формата на кинк на КдФ е устойчиво. Доказано е съществуването на солитоноподобни решения за нелинейното

обобщено сингулярно уравнение на Шрьодингер. Доказани са необходимите и достатъчни условия за устойчивост и неустойчивост на тези солитоноподобни решения.

През последните години едно друго важно нелинейно уравнение бе обект на изследване от много автори,

а именно уравнението на Камаса-Холм

$$u_t - u_{xxt} + 2wu_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

Това уравнение е изведено, като модел на плитка вода интегруемо в смисъл на безкрайно-мерна Хамилтонова система Задачата на Коши за уравнението на Камаса-Холм е добре изследвана и са получени подходящи закони за съхранения Уравнението на Камаса-Холм има глобални решения от два типа :класически и сингулярни.

Интересното в случая е, че тези сингулярности са от вида на така наречените избухвания за крайно време,

т.е. решението остава ограничено, но производната

става неограничена за крайно време.

За $w=0$ решенията от вида на уединена вълна са от вида $u(x,t)=\varphi(x-ct)$ където $\varphi(x)=e^{-|x|}$. Поради вида си тези решения се наричат пикони. Освен това, те са устойчиви.

За $w \neq 0$, решенията от вида на уединена вълна са гладки и орбитално устойчиви .

В работата (19) Хакъев и Кирчев въвеждат обобщено уравнение на Камаса Холм

, $u_t - u_{xxt} + \left(a(u)\right)_x = \left(\frac{1}{2}b'(u)u_x + b(u)u_{xx}\right)_x$

$u(x,0) = u_0(x)$

което при $b=0$ е добре известното уравнение за разпространение на вълна в плитка вода, а именно обобщеното уравнение на Бенджамин-Бона-Махони. За $a(u) = \frac{3}{2}u^2$ и b(u)=u е уравнението на Камаса -Холм.

Хакъев и Кирчев изследват проблема за орбиталната устойчивост на решенията от вид уединена вълна в случая на степенна нелинейност като доказват при какви степени решението е устойчиво и при какви неустойчиво .В доказателството съществена роля играят нелинейните функционали

$$M(u) = E + vQ + c_1 V,$$

$$E(u) = -\int_0^T \left[A(u) + \frac{b(u)}{2}(u_x)^2 \right] dx$$

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[u^2 + (u_x)^2 \right] dx$$

$$V(u) = \int_0^T u \, dx$$

които се явяват закони за съхранение за уравнението.

Литература

(1) C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura, The Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI

Methods for exaxt solution}, Comm. Pure Appl. Math., 27(1974).

(2) A. Jeffrey and T.Kakutani, Stability of the Burgers shock wave and the Korteweg de Vdies soliton, Indiana Univ. Math. J.20 (1970) , 463-468.

(3)T. B. Benjamin,The stability of solitary waves,

Proc. R. Soc. London A , 328 (1972), 153--183.

(4) J. P. Albert, Positivity properties and

stability of solitary wave solutions of model equations

for long waves, Comm.Partial Diff.Equations 17(1992),1-2

(5) J. P. Albert, J. L. Bona, Total positivity and stability of internal waves in stratified fluids of finite depth, IMA Journal of Applied Mathematics 46(1991),1-19

(6) J. P. Albert, J. L. Bona and D. B. Henry, Suffucient conditions for stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves, Physica 24D(1987),343-366

(7) J. L. Bona, P. Souganidis and W. Strauss, Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type, Proc.Roy.Soc.London Ser.A 411(1987),395-412

(8) M.Weinstein, On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive

(9) P. L. Lions, Principe de concentration-compacite en calcul des variations, C. r. Acad. sci. Paris {\bf294} (1982), 261--264.

(10) T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrodinger equations, Comm. Math. Phys. {\bf85} (1982), 549--561.

(11) M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, J. Funct. Anal. {\bf 74} (1987), 160--197.

(12) M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II, J. Funct.

Anal. {\bf 94} (1990), 308--348.

(13) M. Weinstein, Modulational stability of ground states of nonlinear Schrodinger equations, SIAM J. Math. Anal. {\bf 16} (1985), 472--491.

(14) M. Weinstein, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, Comm. Pure Appl. Math. ,39, (1986), 51-67.

(15) M. Weinstein, Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation, Comm . Part. Diff. Equations ,12, (1987) No 10, 1133--1173.

(16) I. D. Iliev and K. P. Kirchev, The stability of travelling waves for nonlinear equations of the Benjamin--Bona--Mahony equationtype, Math. Nachr. {\bf 141} (1989), 313--324 (in Russian).

(17) I. D. Iliev and K. P. Kirchev, Stability and instability of solitary waves for one-dimensional singular Schrodinger equations, Diff. Integral Eqs {\bf 6} (1993) No 3, 685--703.

(18) D. Bennett, J. Bona, R. Brown, S. Stansfield and J. Stroughair, The stability of internal solitary waves, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. {\bf 98} (1984), 351--379.

(19) S. Hakkaev, K. Kirchev, Local well-posedness and orbital stability of solitary wave solutions for the generalized

Camassa-Holm equation , Comm. Part. Diff. Eq. 30 (2005), 761 – 781.

,